Rodica Manolescu
Elvira Popescu
Paula Nica
Iuliana Stoica

MATEMATICĂ

BACALAUREAT - TESTE

M1

Booklet
București, 2024

Enunțuri

TEST 1

Subiectul I. Se scriu pe foaie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Calculați $(3\sqrt{2}+2)^2-(2\sqrt{18}+1)^2+(6\sqrt{2})^2$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=4x-2$ și $g(x)=8-x$. Calculați distanța de la originea sistemului de coordonate xOy la punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|2^x-1|=3$.

4. Calculați $\dfrac{(n+1)!\,(n+5)!}{(n+2)!\,(n+4)!}$, unde n este număr întreg, $n \geq -1$.

5. Fie ABC un triunghi cu $AB=AC=2\sqrt{3}$ și $\widehat{A}=120°$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

6. Determinați $x \in (0;\pi)$, știind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos x\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin x\right)^2=2$.

Subiectul al II-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Fie matricea $M(a)=\begin{pmatrix} a & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $M(a)+M(-a)=2\cdot M(0)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(M(x))=0$.

c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pentru care $M(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătați că $x \circ y = (x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

b) Arătați că $x \circ 5 = 5 \circ x = 5$, pentru orice număr real x.

c) Calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 5 \circ \ldots \circ 2024$.

Subiectul al III-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(3;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+16}{x-3}$.

a) Scrieți ecuația asimptotei oblice la graficul funcției.

b) Studiați monotonia funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{2x-1}$.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2+a)$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^x[x^2-2x+(a+2)], a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați numărul real a pentru care funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x)dx=e$.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

LIBRIS | We know books

TEST 2

Subiectul I. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Calculați $[18,03]+[-18,03]+\{1,51\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă și, respectiv, partea fracționară a numărului real x.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx-15$. Aflați numărul real m, pentru care punctul $M(4;-7)$ aparține reprezentării grafice a funcției f.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+2}<1$.

4. Aflați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{c, u, l, e, g, i\}$.

5. Fie A, B, C puncte astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$. Aflați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

6. Calculați $8\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

Subiectul al II-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie permutările $\Phi, \Theta\in S_5$, $\Phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{pmatrix}$ și $\Theta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\Phi\Theta$ și $\Theta\Phi$.

b) Determinați cel mai mic număr natural k astfel încât $\Phi^k=e$.

c) Rezolvați ecuația $\Phi^{2025}\cdot x=\Theta^{2024}$; $x\in S_5$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește $x*y=xy-3x-3y+12$.

a) Verificați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

b) Arătați că intervalul $(3;\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

c) Arătați că $1*2*3*\ldots*2024=3$.

Subiectul al III-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

a) Arătați că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

b) Arătați că funcția f este inversabilă.

c) Calculați $\lim\limits_{x\rightarrow\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x^2+5}$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0;+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=3x(\ln x^2+1)$ și $F:(0;+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=3x^2\ln x$.

a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$.

c) Arătați că $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=3$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

TEST 3

Subiectul I. Se scriu pe foaie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Calculați $4 \cdot \log_7(3 - \sqrt{2}) + \log_7(3 + \sqrt{2})^4$.

2. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB, unde A și B sunt punctele de intersecție ale axei Ox cu graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

3. Calculați diferența soluțiilor reale ale ecuației: $\log_2(x^2 - 3x + 5) = \log_2(x + 1)$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5. Calculați $E = \sin(\pi - x) \cdot \sin x - \cos(\pi - x) \cdot \cos x$, unde x este număr real.

6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele punctele $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$ și $C(2; 4)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.

Subiectul al II-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Fie matricea $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & y & x \end{pmatrix}$ și $\Delta(x; y)$ determinantul acesteia, unde x și y sunt numere reale.

a) Calculați $\Delta(1; -2)$.

b) Aflați numărul real b pentru care matricea $A(1; b)$ are rangul 2.

c) Arătați că există cel puțin o pereche de numere reale $(a; b)$ pentru care $\Delta(a; b) = \Delta(b; a)$ și $a \neq b$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$.

a) Calculați $6 \circ 7$.

b) Arătați că $x \circ y = (x - 7)(y - 7) + 7$, pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2019 ori}} = 8$.

Subiectul al III-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x^2-1}$, unde a este număr real.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{x-1}$.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$.

c) Determinați valorile reale ale numărului a pentru care funcția f nu admite puncte de extrem.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2e^x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=(x^2+1)e^x$.

a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Arătați că funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția F are două puncte de inflexiune.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

TEST 4

Subiectul I. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Calculați $S = 1 + 7 + 13 + 19 + ... + 55$.

2. Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 2x + 8$ și $g(x) = x + 4$. Aflați punctul de coordonate pozitive aflat la intersecția graficelor funcțiilor f și g.

3. Aflați soluția reală nenulă a ecuației $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

4. Fie x un număr real pozitiv. Aflați termenul dezvoltării $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{48}$, care nu-l conține pe x.

5. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului AB, unde $A(1; -2)$ și $B(3; 4)$.

6. Determinați $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\sin x + \cos x = 4\sin x$.

Subiectul al II-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie permutările $a, b, c \in S_4$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $b^4 = c^4$.

b) Arătați că a este soluția ecuației $bx = xc$, $x \in S_4$.

c) Determinați o soluție a ecuației $xc^3 = b^3x$, $x \in S_4$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + 6x + 6y + a$, $a \in \mathbb{Z}$.

a) Determinați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție este asociativă.

b) Pentru $a = 30$, arătați că $x * y = (x + 6)(y + 6) - 6$, pentru orice numere întregi x și y.

c) Pentru $a = 30$, determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $x * x * x = 119$.

Subiectul al III-lea. Se scriu pe foaie rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{-1}{(x+1)x}$.

b) Arătați că f este inversabilă.

c) Calculați $(f^{-1})'\left(\ln\frac{3}{2}\right)$.

2. Fie funcțiile $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln^2 x$ și $F:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x(\ln^2 x-2\ln x+2)$.

a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**